物理B シケプリの続き

はじめに

この間の授業で役立つことに演習プリントとなるものが配られましたので、ここに解答を書きます。試験範囲はMaxwell方程式の積分型までです。問題番号でいえば11までです。(尚、ベクトルポテンシャルは範囲外)あと、シケプリでビオ・サバールの法則を省略したのですが、電磁気学において、ガウス・アンペールの両法則と並ぶ超重要定理でありましたので補足します。

<ビオサバールの法則>

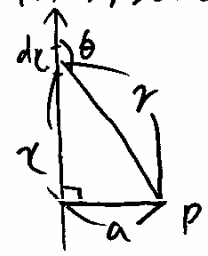
閉じた曲線を流れる電流全体のつくる磁場は、曲線上の位置 $\vec{r'}$ における電流素片 $d\vec{r}$ が位置 $\vec{r}$ につくる磁場を積分して

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{r'} \times (\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$

で求めることができる。

2.

なんか(1)を使うとよくわかりません。
別の方法では、



左図のようにすると、電流素片がPにつくる磁場は

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\theta\, dx$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{a}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot dx$$

よってBの大きさ

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

ここで $x = a\tan\theta$ として計算して

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}.$$

ちなみに、(1)のやり方では

$$B = |S\Theta(r)| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\theta}{|r-r'|^2}dr'$$

ここで $r-r' = \frac{d}{\sin\theta}$ を用いて、やればできるはずなんですが……。途中計算が稚拙故、できませんでした。

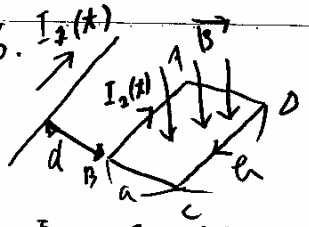
あと、磁場Bを求める問題では、ビオ・サバールの法則を使う方法より、アンペールの法則を使った方法の方がカンタンなので、指定がない限りBアリ係数で解くべきです。

ここでは

$$\oint B\cdot d\vec{r} = B\cdot 2\pi d = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$ となり瞬殺

6.



右ネジの法則より左図のように電場が発生し、長方形回路にも図のような方向に電流が流れる。

$\Phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = abu_0 I_0 \cos\omega t$

$\varepsilon_{emf} = -\dfrac{d\Phi_m}{dt} = \omega abu_0 I_0 \sin\omega t$

(アンペールの法則より $B = \mu_0 n I$
また $\int d\vec{S} = ab$)

↑よくわかりませんが $\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int \vec{B} \int d\vec{S}$ としていました。

$IR = \varepsilon_{emf}$

より $I(t) = \dfrac{\omega abu_0 I_0 \sin\omega t}{R}$

← ε_{emf} は電圧なので、オームの法則を利用すればよい。

また $\overline{AB}$ に作用する力 $F_1 = \dfrac{u_0 I_1 I_2 a}{2\pi d}$

$\overline{DC}$ 〃 $F_2 = \dfrac{u_0 I_1 I_2 a}{2\pi(d+a)}$

↑↑ 同方向に流れる電流には引力

↑↓ 異なる方向に流れる電流には斥力

合力は $F_1 - F_2 = \dfrac{u_0 I_1 I_2 ab}{2\pi d(d+a)}$

なので引力

←引力を正、斥力を負（と仮定した。）

7. $\Phi(t) = \oint B\cdot ds = B\cdot S$

(i) $0 < r < a$ のとき　　$r > a$ のとき

5 より $B = 0$

なので インダクタンスは存在しない

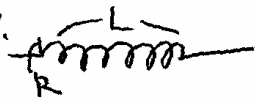
$\Phi(t) = L\,I(t)$ のとき L を自己インダクタンスといって、回路の幾何学的条件から求める

(ii) $r < a$ のとき

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ また $S' = \pi r^2$

より $\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{\mu_0 r}{2} I$

よって $L = \frac{\mu_0 r}{2}$

9. 

(N回巻き)

$\Phi = NBS$ に

$\begin{cases} B = \mu_0 n I & (n: \text{単位あたり巻き数}) \\ N = Ln. & S = \pi r^2 \text{ ただし } r \end{cases}$

← アンペールの法則

$\Phi = \mu_0 I \pi R^2 n^2 L$

$\therefore L = \mu_0 n^2 \pi R^2 L$

← 左辺のLはインダクタンス、右辺のLはコイルの長さなので混同しないように。数字もまぎらわしいこともあるね

また、$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$

$= -\mu_0 \pi R^2 n^2 L \frac{dI}{dt}$

$= -L \frac{dI}{dt}$

← Φ で t の関数は I のみ

時間Δtの間に電荷$\Delta Q = I\Delta t$を、移動させるのに、必要な仕事

$$\Delta W = -\mathcal{E}(t)\Delta Q$$
$$= -\mathcal{E} I \Delta t$$

よって

$$U_B = W = -\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t) I(t)\, dt$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} L \frac{dI}{dt} I(t)\, dt$$
$$= L \int_{t_0}^{t_1} I(t)\, dI$$
$$= L \int_0^{I} I'\, dI'$$
$$= L \frac{1}{2} I^2 = \frac{1}{2} L I^2$$

$\mathcal{E}(t)$に逆らうので－をつける

$\because \mathcal{E}(t) = -L\frac{dI(t)}{dt}$

↓ ?

$$\begin{cases} L = \mu_0 n^2 \frac{LS}{V} & \text{—①} \quad V: \text{体積} \\ I = \frac{B}{\mu_0 n} & \text{—②} \end{cases}$$

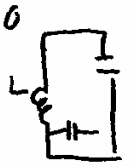
をU_Bに代入して

$$U_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} V$$
$$\frac{U_B}{V} = u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

磁場エネルギー密度は単位体積あたりの磁場の大きさなので、この場合$U_B = V u_B$と表された時のu_Bを求めればよい。

これを見るとu_BにはIもLも含まれていないことから①②式を代入した

10



$$I + \frac{dQ}{dt} = 0 \quad \text{—③}$$
$$-L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad \text{—④}$$

③より $I = -\frac{dQ}{dt}$

両辺を微分 $\frac{dI}{dt} = -\frac{d^2Q}{dt^2}$

これを④に代入し

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q(t) = 0$$

これは $w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ の調和振動子の運動方程式となっている

この解は一般的に

$$Q(t) = B\cos(wt+\phi) \quad w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

と書け

$$I(t) = -\frac{Q(t)}{dt} = Bw\sin(wt+\phi)$$

$$Q(0) = B\cos\phi = Q_0 \quad \text{—①}$$

$$I(0) = Bw\sin\phi = 0 \quad \text{—②}$$

②でBw≠0より $\sin\phi = 0$

$\Leftrightarrow n\pi = \phi$

nは整数

$$Q_0 = (-1)^n B$$

←①に代入した

$\cos(wt+n\pi)$

$= (-1)^n \cos wt$

よって $Q(t) = (-1)^n Q_0 \cos(wt+n\pi)$

$$= Q_0 \cos(wt)$$

$$I(t) = -\frac{Q(t)}{dt}$$

$$= Q_0 w \sin(wt)$$

$$V_E = \frac{Q^2(t)}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2 wt$$

$$= \frac{Q_0^2}{4C}(1+\cos 2wt)$$

$w^2 = \frac{1}{LC}$

$\sin^2 wt = \frac{1-\cos 2wt}{2}$

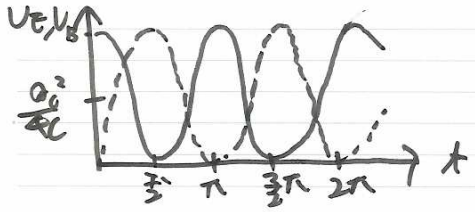
$$V_B = \frac{LI^2}{2} = \frac{LQ_0^2w^2}{2}\sin^2 wt$$

$$= \frac{Q_0^2}{4C}(1-\cos 2wt)$$

$$V_E + V_B = \frac{Q_0^2}{4C}$$

保存されている。

グラフにすると



$\frac{Q_0^2}{4C}$ を基準とし
U_E を同位相がずれであることに注意して書いてから
U_B を $U_E + U_B = \frac{Q_0^2}{4C}$
となるように書く
($\frac{Q_0^2}{4C}$ を中心に上下に折り返して書く)

11. ガウスの法則より

$$\int_S E \cdot dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

よって

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S E \, dS$$
$$= \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0}$$
$$= \frac{dQ}{dt}$$

$$\oint B \cdot dr = \mu_0 (I + I_d)$$

にあてはめ

$$\oint B \cdot dr = \mu_0 \left(I + \frac{dQ}{dt} \right)$$

ここで

極板間には電流が流れず磁場も発生しないので 左辺 $= 0$

$\mu_0 \neq 0$ より $I + \frac{dQ}{dt} = 0$ //

シケプリ訂正

すんごい間違いがありました。すまそ。
だって徹夜してつくったんだもん。

・P4 (5) ガウスの法則の応用例、例1

$\lambda l \to \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$

・P6 (2) 静電ポテンシャル、例1

$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2} dx \to \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{x^2}dx$

P7 1行目

電場の微分により静電ポテンシャルが求まる
→静電ポテンシャルの微分により電場が求まる。

・P10 (3) RC回路とジュール熱

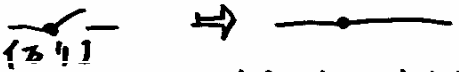
$P = VI = IR^2 = V^2R \to RI^2 = \frac{V^2}{R}$

・P11 (3) 電流の作る磁場

d：導線間の距離

・P13 (a) ファラデーの法則

回路のスイッチを閉じておいてください



例1

式© → 入なものありません

・P14 (11) 運動起電力 例1

公式 → 公式 $\mathcal{E}_{mf} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$

例2 → 演習3と同じっやってください

・P15 右図のような回路 →